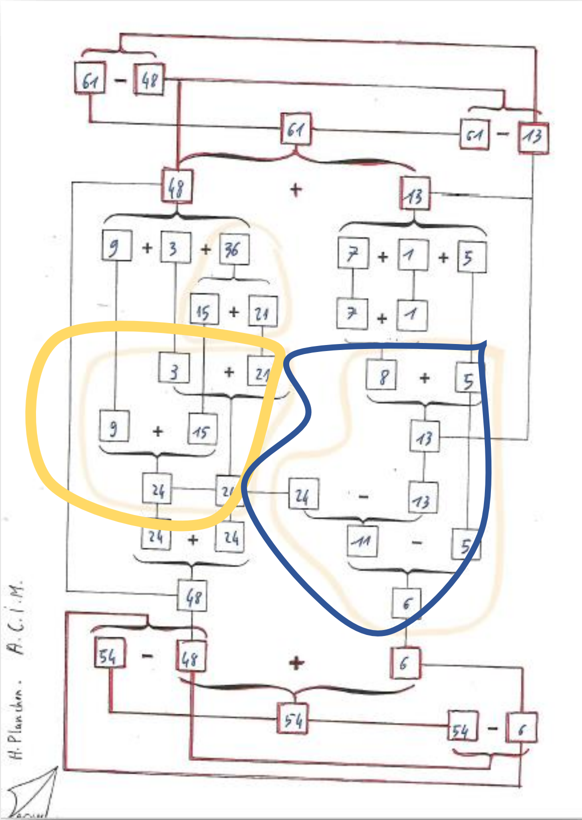
# Chapitre 12

## PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES



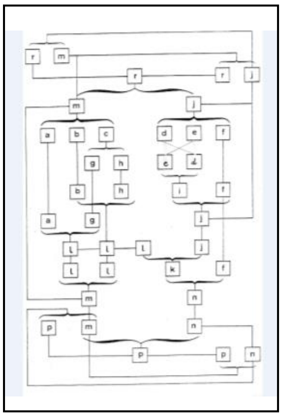
# Chapitre 12

## PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

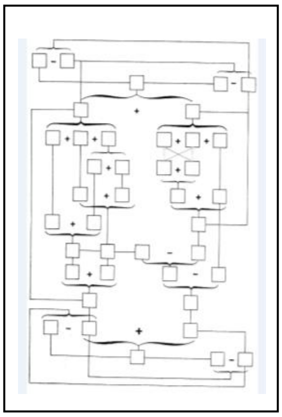
**Présentation générale**

Thématique
Résolution de problèmes arithmétiques
Problèmes numériques et algébriques
Calcul mental

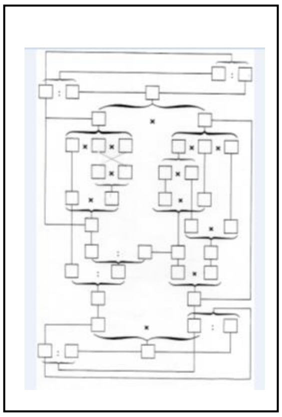
Matériel
Planches 12-1, 12-2, 12-3
Crayon noir, gomme, calculette (expérimentation 5)



12 -1



12-2



12-3

### OBJECTIFS NOTIONNELS

- Résolution de problèmes arithmétiques
- Traitement des problèmes engageant une démarche à plusieurs étapes
- Résolution de problèmes numériques et algébriques, écritures opératoires, écritures littérales
- Calcul d'additions et de soustractions ; calcul mental de sommes, de différences, de produits, de quotients.
- Propriétés de l'addition et de la soustraction, propriétés de la multiplication et de la division, opérations inverses.

### OPÉRATIONS LOGIQUES ET PROCESSUS COGNITIFS

Déduction, stratégies, planification, flexibilité cognitive, contrôle exécutif, algorithme de calcul, mentalisation, abstraction, conceptualisation, contextualisation/décontextualisation, réversibilité.

### PRINCIPES

Les planches 12-1, 12-2 et 12-3 présentent un ensemble d'opérations organisées de façon complexe. Les élèves sont d'abord confrontés au problème consistant à compléter les cases avec des nombres en respectant une logique arithmétique. Ceci les conduit à développer des démarches stratégiques et réflexives. On extrait ensuite de la planche un certain nombre de structures opératoires, lesquelles permettent :
- d'une part d'étudier les propriétés des opérations addition et soustraction, puis multiplication et division, ainsi que leurs relations (la soustraction est « l'inverse » de l'addition, la division est à la multiplication ce que la soustraction est à l'addition, etc.)

- d'autre part de mettre en œuvre une méthodologie pour la résolution de problèmes arithmétiques à plusieurs opérations. Les structures opératoires, étudiées d'abord dans leur dimension abstraite, deviennent ensuite des outils pour aborder les situations concrètes complexes.

Il s'agit ainsi d'entraîner les élèves à la démarche de résolution de problèmes, en même temps que de leur proposer un outil de schématisation favorisant le traitement des problèmes arithmétiques où s'enchainent plusieurs opérations et qui comportent des données inconnues ainsi que des calculs intermédiaires. Pour ce faire, on met en évidence les structures opératoires sous-jacentes aux énoncés couramment rencontrés en classe. L'élève prend conscience du fait que résoudre un problème arithmétique requiert la mise à jour de la structure opératoire impliquée, laquelle peut comprendre plusieurs opérations concaténées.

Ce travail met en avant la compréhension, dissociée ici du calcul proprement dit. En effet, le calcul est souvent l'objet d'une préoccupation démesurée chez les élèves lors de la résolution de problèmes, une préoccupation qui vient alors « court-circuiter » la pensée.

La démarche pédagogique adoptée ici consiste à visualiser les structures numériques sous-jacentes aux énoncés de problèmes et à les présenter aux élèves au moyen d'une schématisation bidimensionnelle à même de soutenir la pensée comme l'organisation de démarches de résolution. À partir de structures opératoires extraites des planches 12-1, 12-2 et 12-3, l'élève s'entraîne à élaborer lui-même de véritables énoncés de problèmes contextualisés associant une suite d'opérations à une situation concrète (articulation mathématiques / réalité).

Par ailleurs, le déroulement de ce chapitre conduit à étudier certaines propriétés de l'addition et de la soustraction, puis de la multiplication et de la division, ainsi que leurs relations réciproques (opérations « inverses »), comme autant d'outils permettant à la fois de conceptualiser l'arithmétique et de résoudre des problèmes numériques (calcul mental, opérations à trou…). Quel que soit le contenu des cases (nombres ou lettres), les relations additions/soustraction (puis multiplication/division) visualisées sur la planche se présentent dans leur aspect générique, rappelant leur statut d'invariants conceptuels. À cet égard, la planche, de par sa facture symbolique et bidimensionnelle, constitue une médiation « transitionnelle » : plus générale que le calcul sur des nombres particuliers mais moins abstraite que l'algèbre qui sera abordée au collège… et pour laquelle une partie du travail réalisé dans ce chapitre constitue une introduction explicite (écritures littérales, équations).

D'un point de vue méthodologique, on présente aux élèves un outil de schématisation favorisant le processus de mentalisation sous-jacent au traitement de situations complexes. L'entraînement à la confrontation aux problèmes intervient ainsi à différents niveaux :
- en situation de problème numérique ou algébrique, quand il faut compléter des structures formelles en respectant des règles et en mettant en œuvre des stratégies de recherche et de contrôle,
- en situation de problème arithmétique, quand il faut abstraire des structures mathématiques à partir de situations concrètes, les conceptualiser en tant qu'invariants généralisables à toute une classe de problèmes équivalents, les appliquer à la création de nouveaux problèmes.

**DÉROULEMENT :**

EXPLORATION : une structure complexe

EXPÉRIMENTATION 1 : problèmes numériques
EXPÉRIMENTATION 2 : propriétés des opérations
EXPÉRIMENTATION 3 : construction d'énoncés de problème
EXPÉRIMENTATION 4 : étude d'une structure canonique
EXPÉRIMENTATION 5 : relations +/- et x/:

PROLONGEMENT 1 : autres problèmes
PROLONGEMENT 2 : vers l'algèbre

# Chapitre 12

## PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

### • EXPLORATION : une structure complexe

- Distribuer à chaque élève un exemplaire de la planche 12-1 et un exemplaire de la planche 12-2.

- Positionner les deux planches dans le même sens. Repérer les différences et les similarités. La même structure est présente sur les deux planches.

- Nommer les éléments présents : cases, signes + et -, accolades, traits, lettres.

-Faire la liste des lettres présentes sur la planche 12-1 et les énoncer dans l'ordre alphabétique en indiquant le nombre de fois où elles apparaissent.
Solution :
a : 2 occurrences ; b:2 ; c:1 ; d:2 ; e:2 ; f:3 ; g:2 ; h:2 ; i:1 ; j:4 ; k:1 ; l:5 ; m:4 ; n:3 ; p:3 ; r:3.

- Remarquer que les cases reliées par un trait contiennent la même lettre.

### • EXPÉRIMENTATION 1 : problèmes numériques

Notions
Résolution de problèmes numériques. Addition et soustraction

Matériel
Planches 12-1 et 12-2
Crayon noir, gomme

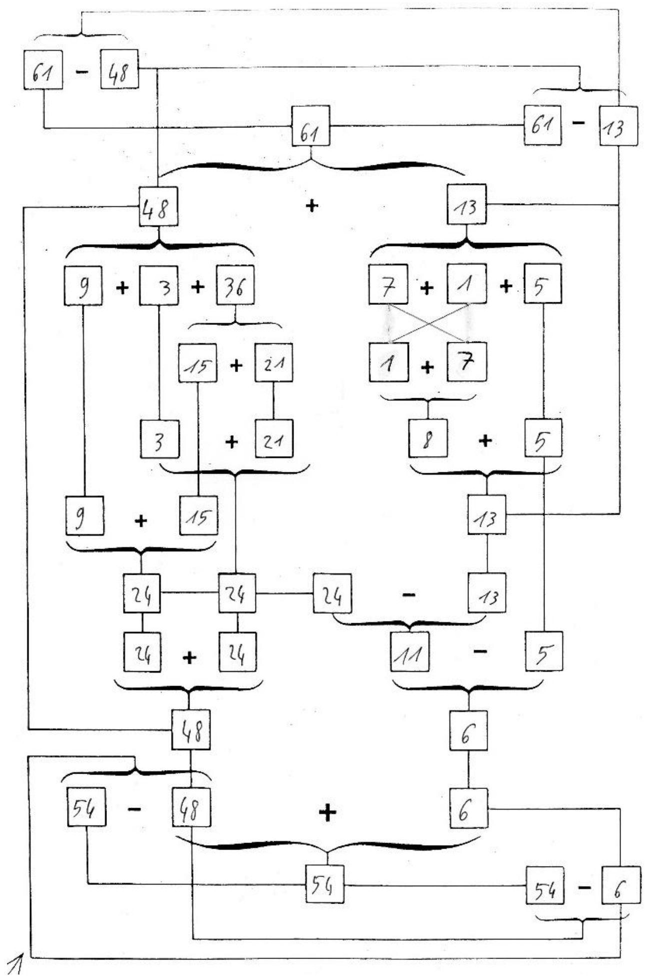
MISE EN ACTIVITÉ

- Sachant que f=5 et i=8, calculer j (solution : j = 13). L'accolade indique où placer le résultat du calcul. Inscrire ces trois nombres, au crayon à papier, dans les cases correspondantes sur la planche 12-2.

$$\underbrace{\boxed{8} + \boxed{5}}_{\boxed{13}}$$

- Sachant que g=15 et h=21, que peut-on trouver ? (Solution : c=36). Inscrire ces nombres sur la planche 12-2.

- On donne b=3. Placer ce nombre, puis déterminer le contenu de toutes les cases encore vides. Attention : les cases reliées par un trait contiennent le même nombre.
Solution :



- Confrontation collective puis validation du contenu des cases. Vérifier en suivant les traits et en s'assurant qu'une même lettre est associée à un même nombre. Discussion du contenu possible pour les cases d et e (7 et 1 ou 1 et 7).

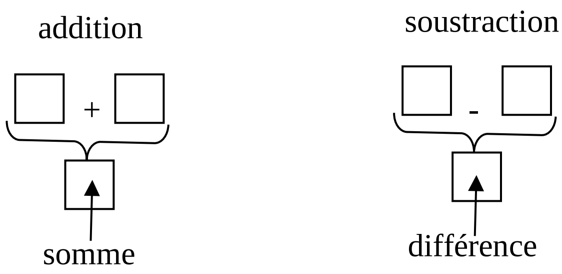
## EXPLICITATION

- Vocabulaire : somme, différence.

- Attention au sens de la lecture pour les soustractions : l-j n'est pas j-l (se référer au sens de la soustraction).

- Méthodologie : aspect non linéaire de la recherche en situation de résolution de problème et importance d'avoir un retour réflexif sur ses productions pour en contrôler la validité. Pour compléter la planche 12-2 il n'est pas toujours indiqué de progresser linéairement (de haut en bas…), il convient de faire preuve de souplesse.

**trace écrite**




EXPLOITATION

- Observer la planche 12-1. Sachant que b=25, h=17, i=22, f=13, calculer k et inscrire ces cinq nombres sur un nouvel exemplaire de la planche 12-2 (solution : k=7).

- Compléter l'ensemble des cases restantes avec des nombres au choix (nombres entiers uniquement, sauf 1 et 0). Il faut et il suffit que les règles indiquées graphiquement soient respectées : un nombre par case, les cases reliées contiennent le même nombre, le résultat d'un calcul se place à l'extrémité de l'accolade, respect du sens de la lecture pour les soustractions.
Contraintes à étudier avant de compléter l'ensemble : il faut que l > j et k > f

- Validation en binôme.

EXTENSION

- Compléter une planche 12-2 vierge, sans indice au départ, avec des nombres entiers ou décimaux.

## • EXPÉRIMENTATION 2 : propriétés des opérations

Notions
Addition, soustraction, propriétés des opérations, opération inverse, algèbre

Matériel
Planches 12-1 et 12-2

### MISE EN ACTIVITÉ

- Comparer les deux structures {m r j} et {m n p} présentes sur les planches 12-1 et 12-2. Elles ont la même forme. Reporter sur une feuille à part les trois opérations qui associent m, r, j d'une part, m, n, p d'autre part.
Solution : m + j = r ; r – j = m ; r – m = j d'une part ; m + n = p ; p – n = m ; p – m = n d'autre part.
Valider avec les nombres inscrits dans les planches 12-2 précédemment remplies.

- Observer les cases f, i et j. Produire plusieurs écritures opératoires qui associent ces nombres. Solution : f + i = j ; i + f = j ; j – f = i ; j – i = f.
Valider avec les nombres inscrits dans les planches 12-2 précédemment remplies.

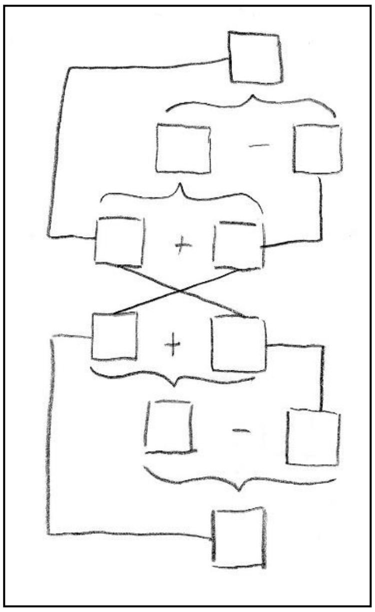
### EXPLICITATION

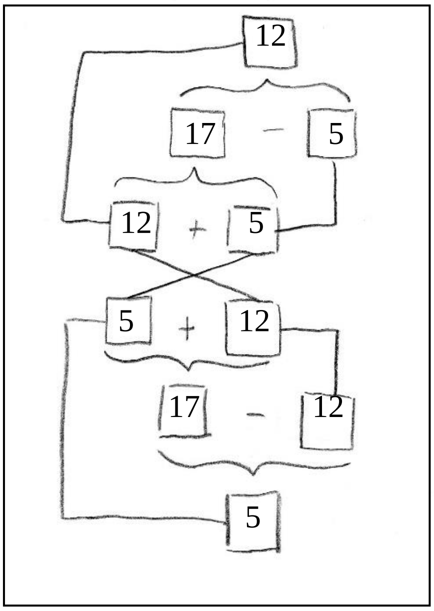
- Étude des propriétés comparées de l'addition et de la soustraction :
À partir de la planche, on voit que d + e = e + d, mais que i – f ≠ f – i : commutativité de l'addition, mais pas de la soustraction.
Sur la planche, on voit que (a+g) + (b+h) = a+b+(g+h) : commutativité et associativité de l'addition.

- Structures {m r j} et {m n p}: expliciter la relation addition/soustraction, la notion d'opération "inverse".
S'appuyer sur le graphisme de la **trace écrite** ci-dessous pour oraliser les relations entre les nombres choisis. L'organisation des cases rend compte d'un invariant (la relation addition/soustraction), le contenu des cases figure les variables. Vérifier qu'on peut appliquer la relation avec d'autres nombres.
Application pour le calcul mental de soustractions[1] : pour calculer 20 – 13, on cherche 13 + … = 20.

[1] cf. *Faites des maths*, cycle 3 niveau 1, Éditions Jocatop, chap. 2

**Trace écrite**






Exemple :
si 5 + 12 = 17 ,
alors 17 – 5 = 12 et 17 – 12 = 5

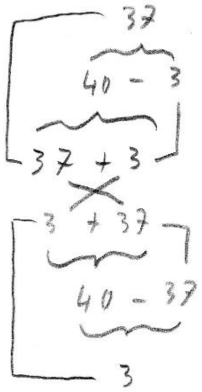
Pour calculer 17 – 12,
on cherche 12 + … = 17

Pour calculer 5 + … = 17,
on calcule 17 – 5 = …

EXPLOITATION

- Écrire différentes façons de rendre compte de j.
Exemple : d+e+f , f+e+d, d+f+e, mais aussi r - m…

- Trouver plusieurs exemples où trois nombres (à deux chiffres, à trois chiffres, à six chiffres, à virgule…) sont reliés par deux additions (commutativité) et deux soustractions (opération inverse). Écrire puis oraliser les différentes opérations en s’appuyant sur la schématisation donnée dans la **trace écrite**.
Exemple :

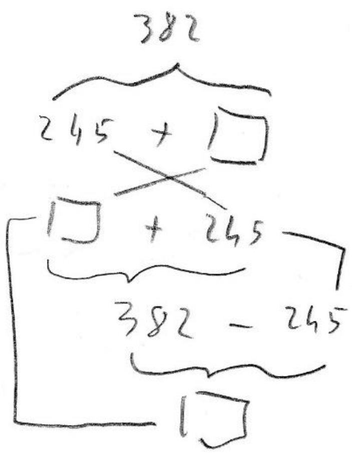



37 + 3 = 40
40 – 3 = 37
40 – 37 = 3

- Sur une planche 12-2 vierge : Sachant b = 14, h = 18, r = 88, calculer j (solution : j = 24).

- Inventer des situations concrètes (nombres avec unités) où les propriétés de l'addition/soustraction se retrouvent.

Exemple : "J'ai lu 245 pages d'un roman qui en compte 382, combien de pages me reste-t-il à lire ?"




EXTENSION

Utilisation des relations addition/soustraction pour le calcul mental de soustractions et les opérations à trou. Exemple : $\boxed{\phantom{0}}$ – 132 = 270 se résout par 270 + 132 = $\boxed{\phantom{0}}$.

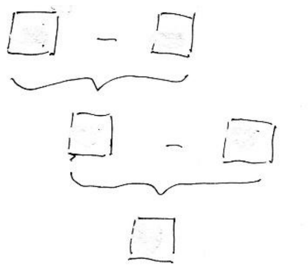
## • EXPÉRIMENTATION 3 : construction d'énoncés de problème

Notions
Problèmes arithmétiques comportant des opérations concaténées

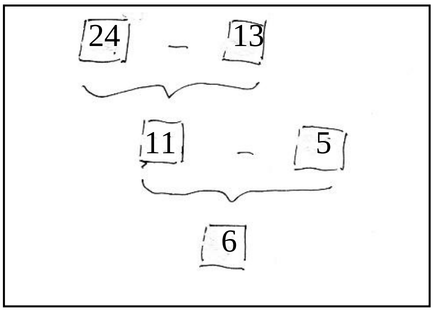
Matériel
Planches 12-1 et 12-2

MISE EN ACTIVITÉ

- Reproduire sur une feuille blanche, en grande dimension, la structure associant {l j k f n} (cases vides)



- Compléter les cases avec des nombres entiers (exemple : 24, 13, 11, 5, 6).




- Construire collectivement un énoncé de problème concret qui puisse s'associer à cette structure opératoire.
Exemple : « j'avais 24 Euros ce matin, j'ai acheté un livre à 13 Euros, ensuite j'ai rendu 5 Euros que je devais à un ami ; combien me reste-t-il d'argent maintenant ? »

- Associer à la même structure opératoire de nouveaux énoncés, reprenant les mêmes nombres et opérations mais dans un contexte différent (unités différentes).
Exemple : « dans un autobus, il y a 24 passagers, 13 passagers descendent, puis 5 autres passagers descendent ; combien y a-t-il de passagers dans le bus maintenant ? ».
Ou : « une randonnée pédestre est prévue sur un parcours de 24 km ; Michèle fait une première pause au bout de 13 km puis une seconde 5 km plus loin ; à quelle distance est-elle de l'arrivée ? »

EXPLICITATION

- Rappel du <u>sens de l'addition et de la soustraction</u>[2], de la nécessaire homogénéité des unités dans ces deux opérations (on additionne/soustrait des Euros avec des Euros, des litres avec des litres…).

- Notion de <u>résultat intermédiaire</u> dans un problème arithmétique.

**Trace écrite**

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{24} - \boxed{13}}_{\boxed{11}} - \boxed{5}}_{\boxed{6}}$$

Problème 1 : j'avais 24 Euros ce matin, j'ai acheté un livre à 13 Euros, ensuite j'ai rendu 5 Euros que je devais à un ami ; combien me reste-t-il d'argent maintenant ?

Problème 2 : dans un autobus, il y a 24 passagers, 13 passagers descendent, puis 5 autres passagers descendent ; combien y a-t-il de passagers dans le bus maintenant ?

Problème 3 : une randonnée pédestre est prévue sur un parcours de 24 km ; Michèle fait une première pause au bout de 13 km puis une seconde 5 km plus loin ; à quelle distance est-elle de l'arrivée ?

EXPLOITATION

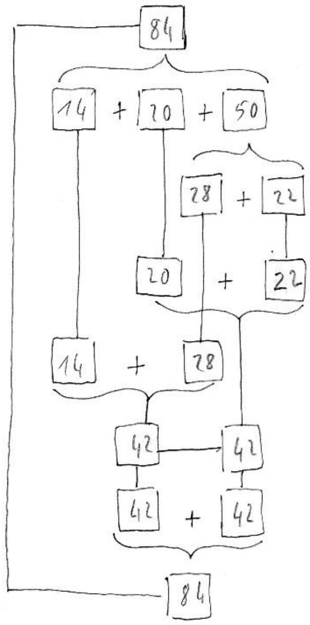
- Présenter des énoncés de problème concrets, comportant d'autres nombres que ceux inscrits sur la planche 12-2 lors de l'expérimentation 1, et demander aux élèves de <u>trouver les structures opératoires</u> qui leur correspondent sur la planche 12-1.

Exemple 1 : pour acheter une voiture qui coûte 26 000 Euros, Gregor a versé 11 000 Euros à la commande et 4 000 Euros à la livraison ; il paiera le complément dans 6 mois ; quelle somme lui reste-t-il à payer ? (structure l, j, i, f , résultat : k)

Exemple 2 : il y a 85 bonbons dans un sachet, on en mange 12 le matin et 27 l'après-midi, combien reste-t-il de bonbons à la fin de la journée ? (structure l – j - f = n)

Exemple 3 : Catherine et Christine reçoivent un livre valant 14 Euros, un disque valant 20 Euros et une somme d'argent de 50 Euros. Si Catherine prend le disque et Christine le livre, comment doivent-elles se répartir la somme d'argent pour que chacune ait un cadeau de valeur identique ? (structure m, a, b, c, g, h, l, résultats : 22 et 28).

[2] cf. *Faites des maths*, cycle 3 niveau 1, Éditions Jocatop, chap. 2




- En binôme, reproduire sur une feuille blanche d'autres structures opératoires issues de la planche et construire des énoncés concrets pouvant s'y associer. Les faire valider par un pair.

EXTENSION

- En binôme : un élève rédige un énoncé de problème, l'autre doit dessiner une structure opératoire qui puisse le représenter. Tous deux discutent ensuite des modifications à apporter à l'énoncé et/ou à la structure pour arriver à un résultat concordant.

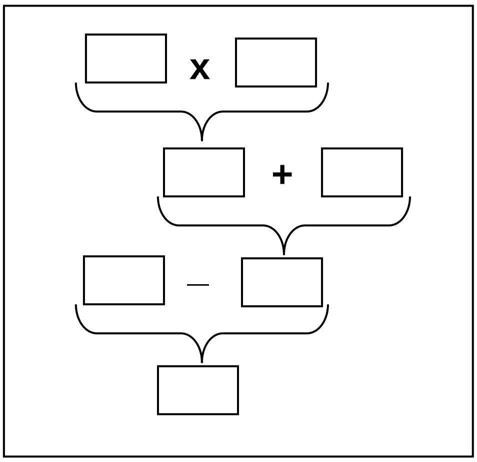
- Les énoncés ainsi construits prennent place dans un répertoire d'énoncés de problèmes dans lequel on pourra puiser ultérieurement pour s'entraîner à la résolution de problèmes.

- **EXPÉRIMENTATION 4 : étude d'une structure canonique**

Notions
Problèmes arithmétiques

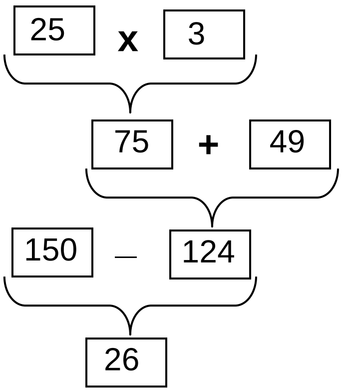
MISE EN ACTIVITÉ

- Reproduire au tableau et faire dessiner individuellement la structure suivante :




- Compléter avec des nombres au choix.

Exemple :




- Construire un récit intégrant ces nombres et ces opérations.

Exemple : « Je me rends au supermarché avec 150 euros en poche, épargnés sou à sou depuis des années. Je choisis trois CD de musique. Leur prix est de 25 euros chacun, ce qui fait 75 euros pour les trois CD ensemble. Plus loin dans les rayons, je prends un jeu vidéo coûtant 49 Euros. Je passe à la caisse et on m'annonce un total de 124 Euros. Je n'ai pas l'appoint alors je donne trois billets de 50 euros, qui font 150 Euros. La caissière me rend la monnaie et je repars chez moi avec mes trois CD, mon jeu vidéo et 26 Euros qui me serviront pour acheter un goûter ».

- Transformer cette histoire en un énoncé de problème. Dans ce cas, le récit est réduit à une histoire sommaire et certains nombres ne sont pas donnés, notamment celui contenu dans la dernière case (réponse à la question posée dans l'énoncé).

Exemple : « Au supermarché, j'achète 3 CD à 25 Euros pièce et 1 jeu vidéo valant 49 Euros. Je donne 150 Euros pour payer mes achats. Combien va-t-on me rendre ? »

EXPLICITATION

- Analyser les opérations impliquées par la situation en fonction de leur sens[3] ainsi que les résultats intermédiaires qui font partie de la structure du problème mais qui ne sont pas évoqués dans l'énoncé.

**Trace écrite**

$$\underbrace{\boxed{25} \times \boxed{3}}_{\boxed{75}}$$

$$\underbrace{\boxed{75} + \boxed{49}}_{\boxed{124}}$$

$$\underbrace{\boxed{150} - \boxed{124}}_{\boxed{26}}$$

Problème :
Au supermarché, j'achète 3 CD à 25 Euros pièce et 1 jeu vidéo valant 49 Euros.
Je donne 150 Euros pour payer mes achats. Combien va-t-on me rendre ?

EXPLOITATION

- Rédiger un nouvel énoncé de problème s'appliquant à cette même structure, mais relevant d'un contexte différent, les unités n'étant pas les mêmes.

Exemple 1 : Jean le camionneur a déjà fait 4 livraisons dans sa journée : 3 trajets de 25 km chacun et 1 trajet de 49 km. Sa prochaine livraison étant assez éloignée, il se demande combien de km il peut encore parcourir avant de devoir faire le plein dans une station-service. Il sait qu'il avait une autonomie au départ de 150 km. Quelle distance peut-il encore parcourir ?

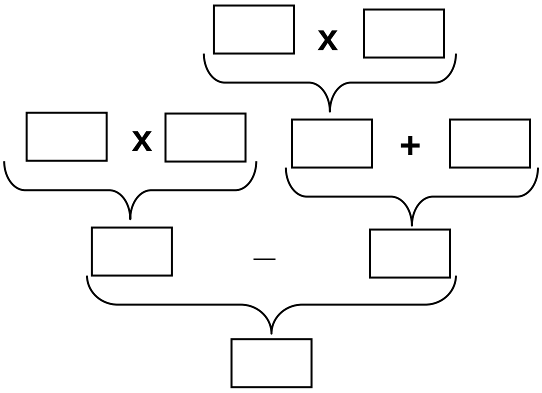
Exemple 2 : Un transporteur a déjà livré 3 caisses de 25 bouteilles et une caisse de 49 bouteilles. Sa tournée prévoit la livraison de 150 bouteilles. Combien lui reste-t-il de bouteilles à livrer ?

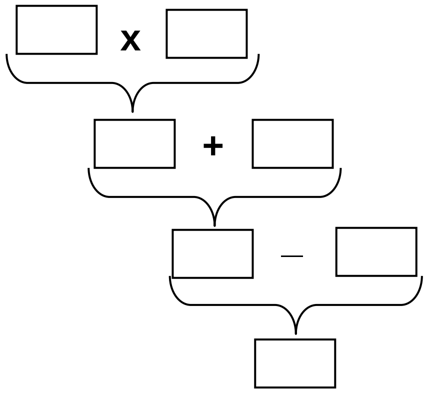
EXTENSION

- Modifier la structure initiale et adapter ou créer des énoncés en conséquence.

Exemples :

[3] Notamment le sens de la multiplication et de la soustraction, cf. *Faites des maths !* Cycle 3 niveau 1, Éditions Jocatop




Au supermarché, j’achète 3 CD à 25 Euros pièce et 1 jeu vidéo valant 49 Euros. Sachant que je donne 3 billets de 50 Euros pour payer mes achats, combien va-t-on me rendre ?

Au supermarché, j’achète 3 CD à 25 Euros pièce et 1 jeu vidéo valant 49 Euros. J’utilise un coupon de réduction de 5 Euros. Combien dois-je payer ?

**• EXPÉRIMENTATION 5 : relations +/- et x/:**

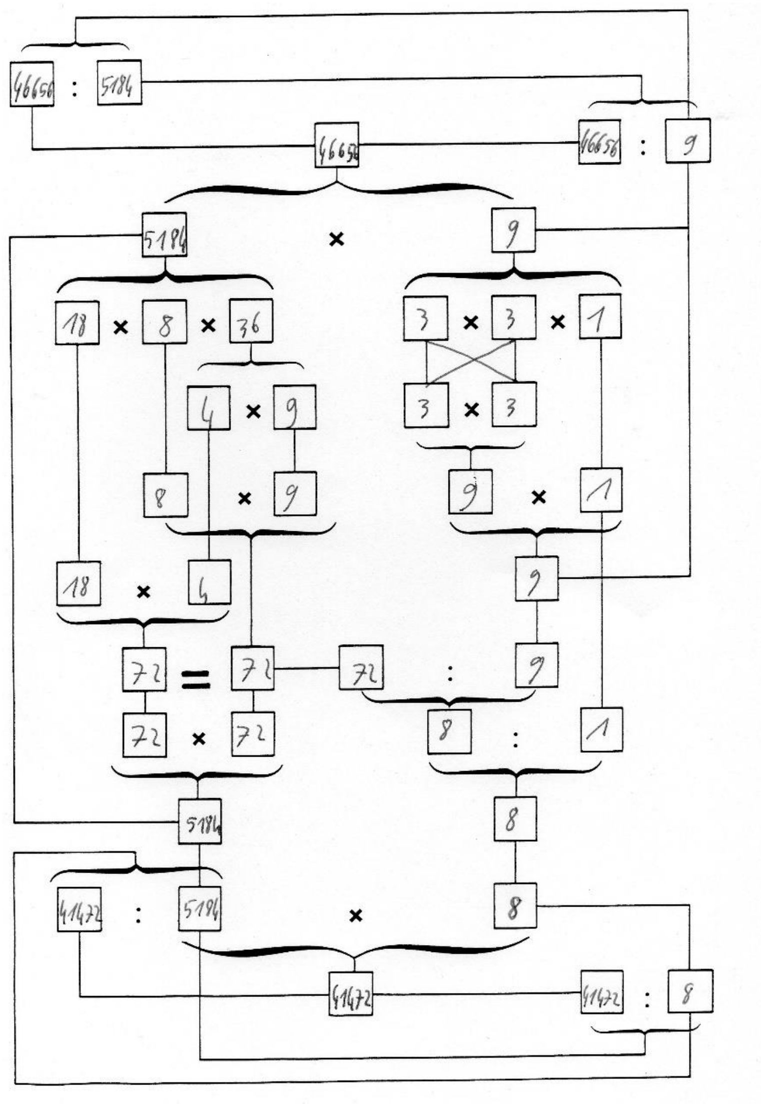
Notions
Opération inverse, multiplication et division

Matériel
Planche 12-3
Crayon noir, gomme, calculette

MISE EN ACTIVITÉ

- Distribuer la planche 12-3. Observer les similitudes et différences par rapport à la planche 12-2 : le signe de la multiplication est à l'emplacement des signes + , le signe de la division est à l'emplacement des signes -

- Sachant que b=8, g=4, f=1, h=9, i=9, compléter la planche. Utiliser la calculette si besoin




- Validation en binôme puis collective.

EXPLICITATION

- Vocabulaire : produit, quotient.

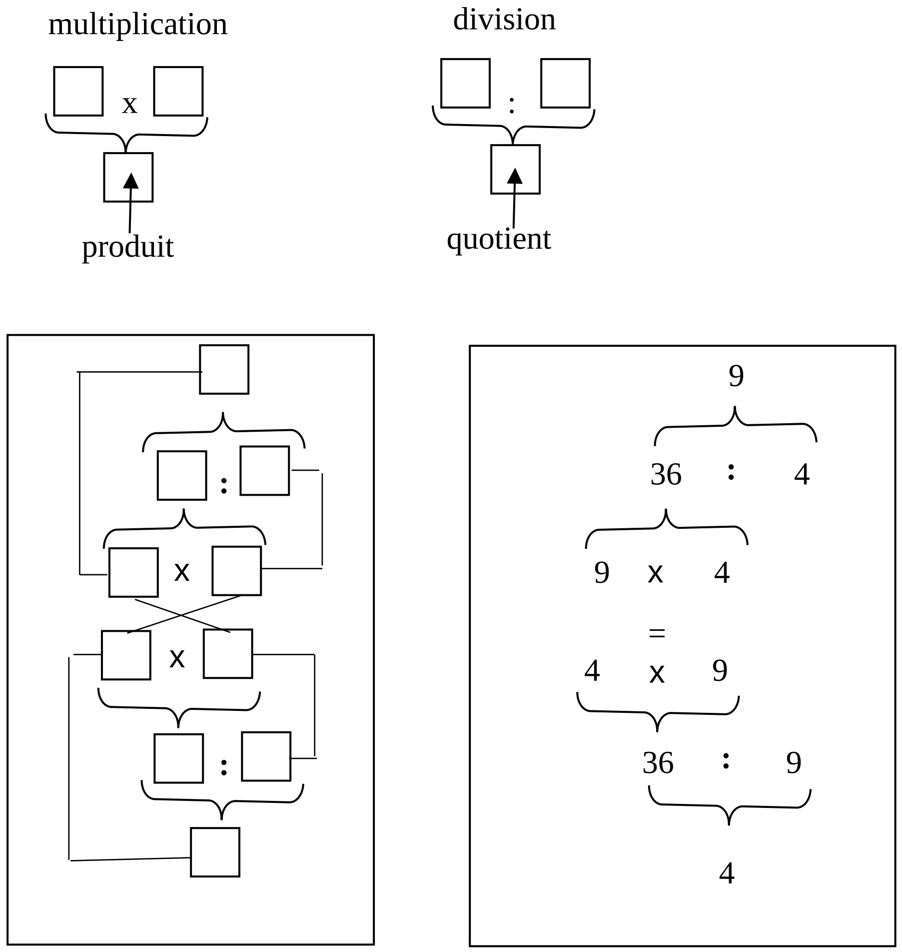
- Propriétés : commutativité et associativité de la multiplication.
Vérifier, avec des nombres, que a x b x c = b x c x a = …, mais que (l : j) n'est pas égal à (j : l) et que (l : j) : f n'est pas égal à l : (j : f).

- Étudier la relation entre multiplication et division (opérations « inverses ») à partir des structures {m r j} et {m n p} sur la planche 12-3.
À une multiplication correspondent deux divisions[4].
S'appuyer sur le graphisme de la **trace écrite** ci-dessous pour oraliser les relations entre les nombres. L'organisation des cases rend compte d'un invariant, le contenu des cases figure les variables.
Utilisation pour le calcul mental de divisions : pour calculer 20 : 4, on cherche 4 x … = 20.

- Plus généralement, observer l'isomorphisme des relations addition/soustraction d'une part (cf. Expérimentation 3) et multiplication/division d'autre part.

[4] cf. *Faites des maths !* Cycle 3 niveau 1, Éditions Jocatop, chap. 8

**trace écrite**




Exemple : si 9 x 4 = 36, alors 36 : 4 = 9 et 36 : 9 = 4

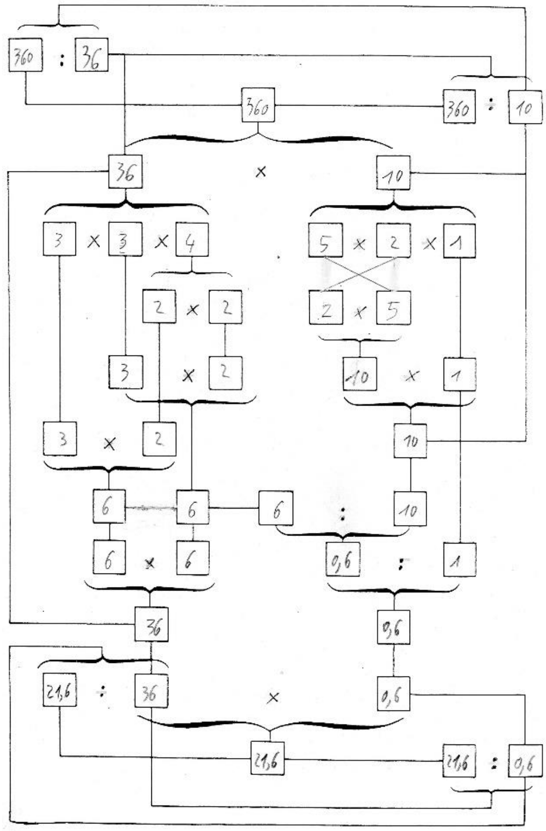
EXPLOITATION

- Écrire les différentes multiplications et divisions associées aux nombres 18, 4 et 72 issus de la planche 12-3 complétée lors de la mise en activité.

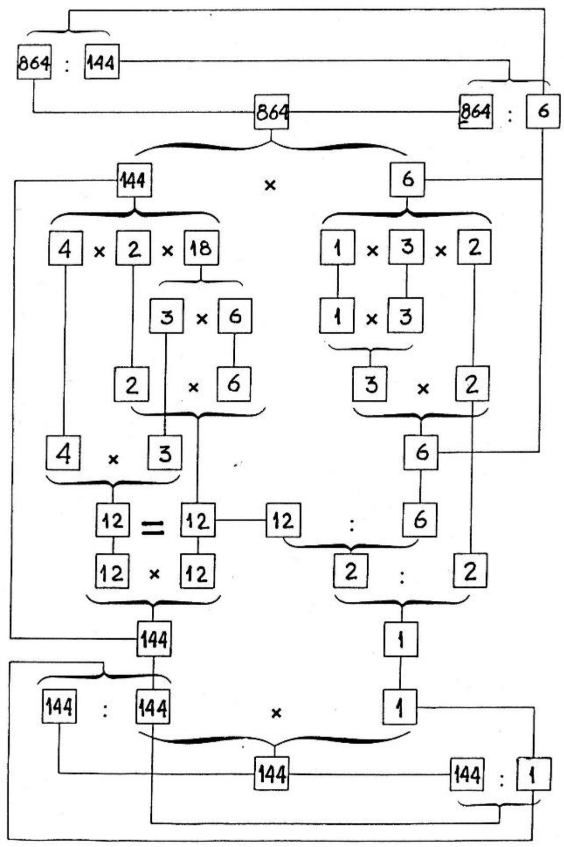
- À partir d'une écriture de multiplication ou de division donnée, trouver les autres écritures opératoires qui associent ces mêmes trois nombres.
Exemple : 60 x 8 = 480, donc : 8 x 60 = 480, 480 : 8 = 60, 480 : 60 = 8.

- Entraînement au calcul mental de divisions. Exemple : 79 : 8 = …

- Compléter une planche 12-3 avec des nombres au choix. Contraintes : le nombre zéro est exclu, le nombre 1 ne doit pas être utilisé pour plusieurs lettres, les nombres à virgule sont autorisés.
Exemple :




- <u>Remplir</u> une planche 12-3 avec, comme contrainte, uniquement des nombres entiers, non nuls.
Exemple :



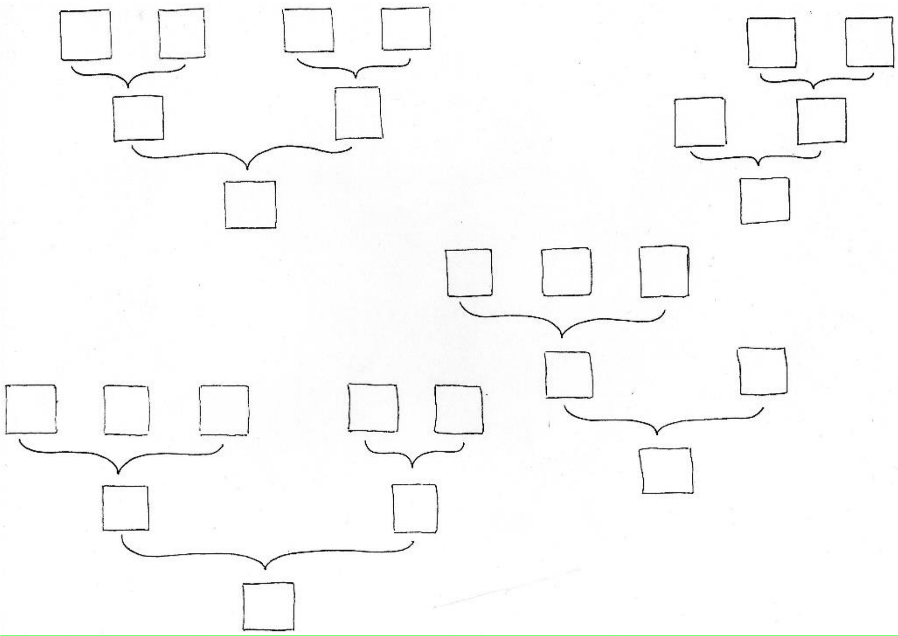
- Problèmes concrets : structure {a x b x c = m} et calcul du volume de parallélépipèdes rectangles ; structure {m x n = p} et calcul d'aires de rectangles ou calcul d'une dimension quand on connaît l'aire et l'autre dimension.
Exemple : calculer la longueur d'un rectangle dont l'aire est 480 cm² et la largeur 6 cm.

EXTENSION

- Décomposer un nombre en produits de facteurs. Étudier ainsi des nombres tels que : 48, 18, 72, 36.

## • PROLONGEMENT 1 : autres problèmes

- Proposer différentes structures à compléter avec des nombres et opérations, puis associer à une histoire ou à un problème à inventer.
Valider ensuite collectivement.
Exemple de quatre structures, parmi d'autres possibles :



- Énoncer un problème dont les élèves doivent dessiner la structure au fur et à mesure.
Exemple : « j'ai fait développer sur papier 48 photos de mon appareil numérique, 7 sont ratées ; j'ai aussi fait développer 50 photos qui étaient sur mon téléphone portable, 3 sont ratées. Combien de photos vais-je coller dans mon album ? Sachant qu'il y aura 5 photos par page, de combien de pages ai-je besoin ? »
Discuter et valider collectivement les structures proposées.
Variante : Trouver la bonne structure parmi plusieurs déjà dessinées.

## • PROLONGEMENT 2 : vers l'algèbre

- En observant la planche 12-1, trouver différentes écritures avec des lettres rendant compte des valeurs suivantes : m ; r ; p.
Par exemple :
m = a + b + c = (a + g) + (b +h) = r – j
r = (a+b+c) + (d+e+f)
p = (a+g) + (b+h) + ( b+h) - (d+e+f)
m=2 x l
...